

Versão Online ISBN 978-85-8015-037-7
Cadernos PDE

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS
DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2007

VOLUME I

UM CONVITE À MODELAGEM MATEMÁTICA: DISCUSSÃO SOBRE O PROBLEMA DA ÁGUA

Tereza Verônica Citelli Crivelaro¹
Lilian Akemi Kato²

Resumo

Este artigo apresenta os resultados da aplicação da proposta de implementação do projeto "Modelagem Matemática como estratégia para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio", onde a modelagem foi utilizada como estratégia de ensino para a construção dos conceitos algébricos que aparecem na resolução de problemas. A atividade foi desenvolvida em três primeiras séries do Ensino Médio do Colégio Estadual Marechal Arthur da Costa e Silva do município de Santa Fé - Paraná, no ano de 2008. Este trabalho por sua vez teve como enfoque principal a aplicação da modelagem matemática no contexto de questões ambientais, buscando conscientizar o educando sobre a necessidade de preservação da água. Procurou-se por sua vez, apresentar o problema, com dados relevantes, qualitativos e quantitativos para os alunos procederem sua investigação e elaboração de modelos matemáticos que pudessem ser utilizados para estimar, entre outras propostas, a disponibilidade de água para consumo no mundo. O tema "escassez e poluição da água", foi escolhido para discussão e desenvolvimento de conteúdos matemáticos como: funções, razão, proporção e porcentagem. A maneira e o momento de convidar os alunos para o estudo do tema escolhido interferiu sobremaneira nos resultados obtidos. As atividades desenvolvidas permitiram aos estudantes conferirem um maior significado aos conteúdos matemáticos trabalhados, perceberem a importância social da Matemática e refletirem sobre problemas sociais e ambientais existentes que comprometem a sustentabilidade ecológica, cultural, econômica e social atual.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Educação Ambiental. Água. Função.

Abstrat

This article presents the results of the proposed application of the implementation of the project "Mathematical Modeling as a strategy for teaching and learning of mathematics in high school," where the modeling was used as a strategy for education for the construction of algebraic concepts that appear in the resolution of problems. The activity was developed on the first three grades of high school in Marechal Arthur da Costa e Silva school of the municipality of Santa Fé - Paraná, in the year 2008. This work in this way had as main focus the application of mathematical modeling in the context of environmental issues, seeking the understanding of the student about the preservation necessity of water. The presented the issue with relevant data, qualitative and quantitative for students to carry their research and mathematical models that could be used to estimate, among other proposals, the availability of water for consumption in the world. The theme of "scarcity and water pollution," was chosen for discussion and development of mathematical content such as functions, reason, proportion and percentage. How and when to invite the students to study the theme chosen interfere over the results. The activities developed allowed the students to give greater

¹Profª da Rede Estadual de Ensino

² Profª Drª do Departamento de Matemática da UEM

meaning to the mathematicians contents worked, understand the social importance of mathematics and reflect on existing social and environmental problems that compromise the current ecological sustainability, cultural, economic and social actual.

Key words: Mathematical Modeling. Environmental Education. Water. Function.

Introdução

O contexto atual de aceleradas mudanças sociais, econômicas e tecnológicas exige, cada vez mais, a formação de alunos reflexivos, críticos e conscientes de seu papel na sociedade.

Para isso, o processo de ensino-aprendizagem não pode ocorrer no sentido único do professor para o aluno, é preciso que o professor adote metodologias de ensino que estimule mais a iniciativa e desenvolva a autonomia nos estudantes, permitindo a construção dos conhecimentos necessários para que o aluno possa agir e compreender o mundo em que vive.

Ainda hoje, o ensino-aprendizagem da Matemática segue antigos moldes, onde o professor é o transmissor do conhecimento e o aluno é o expectador que ouve e reproduz o que lhe foi transmitido. Ao aluno é proposto que resolva exercícios parecidos com exemplos dados ou problemas desvinculados da realidade que não despertam seu interesse para a busca de soluções.

Apesar das discussões e recomendações dos PCNS e DCNS em relação às aplicações da Matemática nas diversas áreas do conhecimento seu ensino em sala de aula continua sendo predominantemente teórico e baseado em fórmulas, sem ligação com a vida.

As Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica (2006) apontam propostas metodológicas da Educação Matemática que alteram algumas formas tradicionais de ensino da Matemática entre elas a inserção da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem, que privilegia a construção do conhecimento pelo aluno, por meio de problemas investigativos ligados à sua realidade.

Nesta metodologia os conteúdos matemáticos são estudados a partir de uma situação problema da realidade buscando-se uma maior interação entre professor e alunos.

A literatura apresenta várias concepções para a Modelagem Matemática, para Barbosa (2001, p. 6), a Modelagem Matemática no ensino é

um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Estas se constituem como integrantes de outras disciplinas ou do dia-a-dia; seus atributos e dados quantitativos existem em determinadas circunstâncias.

De acordo com Bassanezi (2006, p. 16) a “Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. O que tem se mostrado eficaz tanto para dar significado aos conteúdos matemáticos trabalhados como para a construção do conhecimento matemático em si, podendo ser utilizada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem.

No ambiente de aprendizagem de modelagem “os alunos podem desenvolver muitas ações, como realizar operações aritméticas, gerar equações, fazer desenhos, traçar gráficos e, principalmente, produzir discursos” (BARBOSA, 2007, p. 162).

Os discursos produzidos nos momentos de interação entre os alunos e entre estes e o professor são fundamentais no processo de construção do conhecimento, o que geralmente não acontece nas formas de ensino tradicional de matemática, onde a preocupação maior está no treinamento dos alunos em exercícios com respostas prontas.

O ambiente de aprendizagem norteado pela modelagem estimula o aluno a indagar, analisar, pesquisar, discutir e elaborar explicações, adquirindo conhecimentos matemáticos e desenvolvendo atitudes e comportamentos essenciais para um contínuo aprendizado e para a vida em sociedade.

Em geral, são apresentados os seguintes argumentos para a inclusão da modelagem no ensino: “motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática” (BARBOSA, 2004a). Podendo potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, contribuindo para ampliar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas.

Mas, como implementar a Modelagem Matemática na sala de aula? A literatura apresenta experiências de Modelagem desenvolvidas de diferentes maneiras, cada qual com suas dificuldades.

Considerando esta realidade, Barbosa (2004) apresenta três formas de materializar a Modelagem Matemática em sala de aula, podendo se adequar ao nível da turma e a que se pretende. Estas formas também são chamadas pelo autor de 'casos' e estão apresentadas a seguir

No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Aqui, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não é muito extensa... Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. Nesse caso, os alunos são responsabilizados pela condução das tarefas ... no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas 'não-matemáticos', que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos (BARBOSA, 2004a, p. 76, 77).

O professor, conhecedor de suas turmas, é quem deverá escolher a forma de trabalho que melhor se adequar a cada uma delas. Por exemplo, no ensino médio noturno, onde a maioria dos estudantes trabalha o dia todo, dispondo de pouco tempo livre para pesquisas ou atividades de campo, as atividades do 'caso 1' podem ser desenvolvidas com maior facilidade.

Neste trabalho, serão apresentados os resultados obtidos com o desenvolvimento de atividades de modelagem do caso 1 com o tema disponibilidade de água na Terra, em sala de aula, buscando promover a construção de conceitos matemáticos, pelo aluno, desenvolver sua consciência crítica e estimulá-los a participarem ativamente da sociedade em que vivem.

Atualmente, os professores de todas as disciplinas da matriz curricular devem buscar mecanismos para trabalhar a Educação Ambiental, não apenas como tema transversal, mas que esteja ligada aos conteúdos de sua disciplina. Nesse sentido, a Secretaria de Estado de Educação do Paraná sugere que cada escola a contemple no seu Projeto Político Pedagógico e recomenda que a comunidade escolar construa um plano de ação (Agenda 21 Escolar) em direção à sustentabilidade da própria instituição e do seu meio de influência e orienta que essa construção seja contínua e mediada por diversos atores sociais (professores, pais, alunos, comunidade, etc) para ser objeto de mudança e que esteja ligada aos conteúdos de cada disciplina.

Assim, a junção da matemática com questões ambientais representa uma oportunidade para despertar maior interesse dos alunos pelo aprendizado desta disciplina escolar e pelas questões ambientais locais.

Neste trabalho, este tema foi oportuno para desenvolver o conteúdo de funções exponenciais e suas propriedades, apresentando algumas das aplicabilidades da matemática, particularmente deste conteúdo para estudo em outras Ciências.

Vale ressaltar aqui que a matemática ensinada na educação básica não tem como único objetivo a sua aplicabilidade no dia-a-dia do aluno, ela contribui na formação intelectual do educando, desenvolvendo seu raciocínio lógico e sua capacidade de abstração. Atualmente, frente ao cenário tecnológico contemporâneo, o professor precisa adequar estratégias e métodos a fim de alcançar uma formação integral do educando.

A modelagem matemática oferece oportunidades para desenvolver tanto as habilidades intelectuais quanto a aplicabilidade da matemática no dia-a-dia.

Desenvolvimento

No ano de 2007, a Secretaria de Estado da Educação do Paraná, com o apoio da Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, instituiu o Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), como uma política educacional inovadora de Formação Continuada dos(as) professores(as) da rede pública estadual.

Neste programa os professores participantes tiveram a oportunidade de retornar à Universidade com todo tempo livre para estudos e aprofundamento nos conhecimentos necessários para redimensionar sua prática educativa visando melhoria da qualidade do ensino.

Ao longo deste programa de estudos e sob orientação de professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, elaborou-se um plano de trabalho e o material didático-pedagógico a ser utilizado na implementação dessa proposta na escola no ano de 2008.

A proposta de implementação na escola foi então a aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem Modelagem Matemática.

O tema de estudo de intervenção escolhido foi a “Modelagem Matemática como estratégia para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio” cujo objeto de estudo é a “utilização da modelagem matemática para promover a construção significativa, por parte do aluno, dos conceitos algébricos que aparecem na resolução de problemas”.

O material didático-pedagógico produzido foi um “folhas”, que trouxe como referência as Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica; atendendo a um conjunto de especificações, contemplando os seguintes itens: problema inicial, desenvolvimento teórico disciplinar e contemporâneo, desenvolvimento teórico interdisciplinar, propostas de atividades distribuídas ao longo do texto e referências.

O referido material contém propostas de atividades de modelagem, trazendo como tema principal a escassez da água, se materializando em sala de aula, a partir da apresentação de dados relevantes para chamar a atenção do aluno para o problema da escassez e da poluição da água, objetivando a construção do conceito de função exponencial.

A proposta foi implementada em três das quatro primeiras séries do Ensino Médio do Colégio Estadual Marechal Arthur da Costa e Silva do município de Santa Fé, Paraná, durante o ano letivo de 2008.

Segue uma breve descrição dessas turmas, com as quais esta atividade foi desenvolvida. As turmas A e B são do período vespertino e a turma D é do período noturno.

A turma A é composta por 40 alunos, sendo que 35 deles apresenta a idade compatível com a série e o restante tem a idade de 16 anos. A maioria dos alunos desta turma reside na zona urbana do município e uma pequena parcela trabalha no período matutino no comércio ou com a família.

A turma B também é composta por 40 alunos e sete deles tem idade entre 16 e 19 anos. Uma grande parcela dos alunos desta turma reside na zona rural do município, auxiliando a família nos afazeres da lavoura e/ou domésticos, no período da manhã. Alguns alunos residentes na zona urbana também exercem atividades no comércio.

A turma D tem 30 alunos matriculados, mas, na época da aplicação da proposta, apenas vinte estavam freqüentando assiduamente. São trabalhadores da lavoura; das fábricas de confecções e de macarrão, existentes no município;

domésticas; etc. Vários deles passaram por reprovação e/ou evasão, em anos anteriores, por isso, dos trinta alunos matriculados, apenas nove têm idade compatível com a série.

Percebeu-se em sala de aula, que são alunos que apresentam grande defasagem em conteúdos básicos de matemática e na leitura e interpretação de textos. No entanto suas experiências profissionais são bastante evidentes e por isso apresentam mais maturidade, que os demais alunos da mesma série de outros turnos, fazendo com que, algumas vezes, na aula de Matemática, resolvam os problemas propostos por um caminho diferente, utilizando um raciocínio próprio.

Durante conversa informal para explicitar os pré-requisitos da aplicação da proposta foi possível identificar que a grande maioria dos alunos dedicam-se pouco aos estudos em horário extra-classe, mesmo aqueles do período diurno, e, ao propor o desenvolvimento de uma das atividades planejadas no folhas, que envolvia visitas a locais próximos à zona urbana do município, objetivando despertar nos alunos o interesse pelo estudo de problemas ligados ao tema água, a professora percebeu que havia poucos alunos da turma B interessados nesta atividade.

Num primeiro momento, nenhum aluno da turma A, mostrou-se interessado pelas visitas. Inclusive, o aluno desta turma, que teve o melhor desempenho na primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, se manifestou em sala de aula dizendo preferir estudar matemática da forma tradicional. Posteriormente, a aluna representante da turma, justificou a professora que os alunos estranharam o fato deste trabalho ter sido proposto pela professora de Matemática.

Porém, numa das aulas seguintes, nesta turma, um grupo de quatro alunas disseram à professora que gostariam de observar um ribeirão próximo à residência de uma delas, dando então início ao trabalho com este grupo.

Juntas fizeram a visita ao Ribeirão Água das Pedras, em horário extra classe, observaram que existe lixo no leito do pequeno riacho cuja nascente fica localizada a uns 300 metros de um conjunto habitacional. As alunas registraram seu estado por meio de fotos para apresentar à sala.

Próximo ao local visitado, havia uma ligação clandestina de esgoto doméstico no sistema de galeria pluvial. A professora ressaltou algumas conseqüências e a

gravidade daquele ato. Elas fotografaram o local e foram falar com um dos vigilantes sanitários do município para perguntar se aquilo era de seu conhecimento.

O vigilante relatou a respeito da providência que geralmente é tomada, em que é colocada uma massa de cimento na extremidade do tubo, mas, na maioria das vezes, o morador a retira e o problema continua a existir. As alunas perguntaram se o morador é multado por este ato e a resposta dada foi que não existe uma lei na câmara para isto.

Em sala de aula, as alunas mostraram as imagens dos locais observados, para a turma que não demonstrou grande interesse pelo assunto. Houve pouca discussão e questionamentos, mesmo assim, a professora deu início à atividade planejada no folhas, com objetivo de construir o conceito de função exponencial. Para o desenvolvimento desta atividade, entregou para cada aluno uma parte do material produzido contendo um texto informativo e a tabela a seguir.

Tabela 1 – Disponibilidade de água por habitante/Região (1000 m³)

Região	1950	1960	1970	1980	2000
África	20,6	16,5	12,7	9,4	5,1
Ásia	9,6	7,9	6,1	5,1	3,3
América Latina	105,0	80,2	61,7	48,8	28,3
Europa	5,9	5,4	4,9	4,4	4,1
América do Norte	37,2	30,2	25,2	21,3	17,5
Total	178,3	140,2	110,6	89,0	58,3

Fonte: N.B.ayibotele. 1992. The world Water; assessing the resource. www.uniagua.org.br/website/default.asp?hp=38pag=aguaplaneta.htm

Após a leitura, foi solicitado aos alunos que construíssem um gráfico, no plano cartesiano, marcando no eixo das ordenadas a quantidade de água disponível por pessoa, na América Latina, e no eixo das abscissas, o tempo (em décadas) e que a seguir, fizessem uma análise do mesmo, comentando o que observavam.

Os alunos necessitaram da ajuda da professora para a escolha da escala do gráfico, uma vez que, estão habituados a traçar gráficos de função utilizando valores menores do que estes. Inclusive, alguns alunos mostraram falta de habilidade com o manuseio da régua, e assim, esta construção tomou o tempo de uma aula.

Na aula seguinte, a professora retomou a atividade questionando se haviam analisado o gráfico e como isto não tinha acontecido, pediu que o fizessem naquele momento e que pensassem em “qual matemática” poderia ser utilizada para estimar até quando haverá água disponível para consumo, na América Latina. Como os alunos não tiveram uma sugestão, a professora aplicou a atividade que segue abaixo:

- A quantidade de água disponível por habitante da América Latina, em uma década ($Q(n)$), é proporcional à quantidade de água disponível na década anterior ($Q(n-1)$)? Para verificar isso, complete a tabela a seguir.

n (Tempo)	Q (Quantidade de água disponível por habitante na América Latina (1 000 m ³))	Razão entre a quantidade de água disponível na década posterior e na década anterior ($Q(n)/Q(n-1)$)
1	105,0	_____
2	80,2	
3	61,7	
4	48,8	

Quadro 1 – Determinação de uma constante de proporcionalidade.

- Assumindo que os valores obtidos na última coluna são aproximadamente iguais, podemos determinar uma constante de proporcionalidade entre $Q(n)$ e $Q(n-1)$. Indicando esta constante por k , escreva a expressão matemática que fornece a proporcionalidade entre $Q(n)$ e $Q(n-1)$.
- Utilizando a expressão obtida anteriormente, complete a tabela a seguir:

n	$Q(n)=k.Q(n-1)$	Expressão geral
1	$Q(1)= k. Q(0)$	$Q(1)= k. Q(0)$
2	$Q(2)= k. Q(1)$	$Q(2)=k.[k.Q(0)]= k^2.Q(0)$
3		
4		
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n		$Q(n) =$

Quadro 2 – Determinação da expressão que relaciona a quantidade de água com o tempo.

- Tomando um dos pares ordenados (n, Q) , o valor de k e a expressão geral, é possível estimar $Q(0)$ e, com isso, obter uma função exponencial da forma $Q(n)=Q(0).k^n$ que fornece uma estimativa para a quantidade de água disponível por habitante na América Latina em qualquer tempo.
- Segundo a ONU, o volume de água, suficiente para a vida em comunidade e para o exercício das atividades humanas, sociais e econômicas, é de 2.500 m^3 por habitante ao ano. Utilizando o modelo matemático encontrado, estime até que década os habitantes da América Latina terão esta quantidade disponível. Organize os valores em uma tabela como a seguinte.

n	década	Disponibilidade de água por habitante da América Latina (1.000m^3) dada pela expressão que você encontrou.
1	1950	
2	1960	
3	1970	
4	1980	
5	1990	
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Quadro 3 – Estimativa da quantidade de água disponível em cada década.

Os alunos por sua vez, apresentaram dificuldades de interpretação, assim como falta de domínio dos conteúdos básicos, mesmo assim a professora conduziu a atividade explicando cada item no quadro de giz.

Com relação ao grupo de alunas que conheceu a situação do riacho, a professora convidou-as para elaborar um trabalho para apresentar na Feira do Conhecimento do Colégio e/ou, no Com Ciência na cidade de Maringá. Houve interesse do grupo para participar do Com Ciência e de mais cinco alunos da sala e juntos visitaram outros locais (riachos com despejo de efluentes, lixão, Sanepar, estação de tratamento de esgotos), conhecendo melhor esta realidade.

Em horário extra-classe, o grupo de alunos que tiveram autorização dos pais e disponibilidade para participar do Com Ciência, desenvolveu o trabalho intitulado “Matemática e Água”. Para isso, tiveram orientação do professor de Geografia na

confeção de uma maquete representando o relevo do município (carta hipsométrica) onde foram destacados os locais visitados, e também, na elaboração de um texto sobre os problemas ambientais observados e pesquisados por eles.

A professora de Matemática os acompanhou durante as visitas e os orientou na construção de um gráfico de colunas, feito em cartolina, mostrando a disponibilidade de água por habitante da América Latina em cada década e na elaboração de um resumo da atividade desenvolvida em sala de aula. Foi confeccionado um painel com as fotos dos vários ambientes visitados e um pôster deste trabalho.

Ocorreu que, justamente neste período, durante uma aula em que a professora trabalhava a construção e interpretação de gráficos de funções, na turma D, um aluno fez o questionamento: “Para que estudar isso”? A professora justificou dizendo da importância das funções e seus gráficos na resolução de diversos problemas do cotidiano.

Aproveitando a oportunidade, convidou-os para o estudo do tema: Água, acrescentando que as funções e seus gráficos podem ser utilizados para fazer previsões daquilo que pode vir a ocorrer em tempos futuros, como, por exemplo, para estimar até quando teremos água disponível para consumo.

Isso gerou uma discussão entre os alunos e a professora, sobre o assunto. Um aluno comentou que a água poderia acabar em 2050. Outro relatou que a próxima guerra pode vir a acontecer devido à escassez da água e outro citou situações de desperdício de água, achando um absurdo o acontecimento desse fato.

Após a discussão, a professora questionou se gostariam de obter uma expressão matemática que pudesse ser utilizada para fazer estimativas sobre a quantidade de água disponível nas próximas décadas e, como a resposta foi afirmativa, disse-lhes que traria os dados necessários na próxima aula.

Durante as aulas de desenvolvimento desta atividade todos os alunos presentes (em torno de 15) participaram. Organizaram-se em grupos de 2 ou 3 alunos cada e, a professora conduziu as atividades com muito diálogo, buscando promover maior participação de todos.

A professora introduziu a atividade com a mesma tabela entregue na turma A e solicitou que construíssem o mesmo tipo de gráfico. Estes alunos apresentaram as

mesmas dificuldades que aqueles da outra turma nesta tarefa, porém, estavam mais motivados e ansiosos para resolver o problema proposto.

Seguem algumas falas dos alunos com a professora durante a construção do gráfico:

Aluno A: Do jeito que a água está diminuindo, vai acabar logo.

Professora: Você pode explicar o seu raciocínio?

Aluno A: Está diminuindo mais ou menos 20 de um... para o outro. Se continuar assim vai acabar logo.

Professora: Observem os valores das últimas colunas da tabela.

Após certo tempo, outro aluno da equipe comentou:

Aluno B: Diminuiu mais ou menos 20, mas, não seria 1990 no lugar de 2000?

Professora: O ano está correto, acontece que a pesquisa não informou a quantidade disponível em 1990.

Aluno A: Então diminuiu 20 em 20 anos?

Professora: Correto. Observe agora o gráfico, vocês percebem que nas últimas décadas o decréscimo foi menos acentuado?

Os alunos ficaram em silêncio, então a professora aguardou até que todos terminassem a atividade para envolvê-los nesta discussão. Em seguida, foi feito um esboço do gráfico no quadro para que cada grupo procedesse à correção dos seus e foi observado que alguns alunos haviam escrito 2000 no ponto do eixo das abscissas que seria 1990, o que fazia com que os cinco pontos ficassem praticamente alinhados. Após a correção, discutiram o fato de que a queda de aproximadamente 20 mil metros cúbicos, de uma década para a outra, anteriormente, citada pelo aluno A, faz com que os três primeiros pontos do gráfico fiquem na reta, o que não ocorre com os demais, uma vez que, de 1970 para 1980 diminuiu em torno de 13 e de 1980 para 2000 diminuiu 20,5.

Um aluno falou que poderiam subtrair mais ou menos 13 de 28,3 para achar a quantidade de água disponível em 2010, e novamente subtrair 13 de 15,3 para encontrar a quantidade de 2020. Porém, a turma não concordou com este procedimento, uma vez que já tinham a hipótese de que a água acabaria em torno do ano 2050.

Com isso, a professora chamou sua atenção para o fato de que este procedimento pode ser utilizado quando a função que relaciona a quantidade de água disponível com o tempo é do tipo polinomial do primeiro grau, cuja representação gráfica é uma reta. Aproveitou para falar que o coeficiente a na

expressão $y=ax+b$, que representa tal função, é uma constante chamada taxa média de variação, e é determinada pela razão entre a variação de y e a variação de x . E juntos procederam os cálculos abaixo, comprovando que neste caso não se tratava de uma função polinomial do primeiro grau.

$$\frac{80,2 - 105}{1960 - 1950} = -2,48 ; \quad \frac{61,7 - 80,2}{1970 - 1960} = -1,85 ;$$
$$\frac{48,8 - 61,7}{1980 - 1970} = -1,29 \text{ e } \frac{28,8 - 48,8}{2000 - 1990} = -1,025.$$

Em seguida a professora chamou a atenção de todos para o tipo de decréscimo mostrado pelo gráfico, pois, gostaria que percebessem que a tendência da curva é aproximar de uma linha horizontal, como acontece com o gráfico da função exponencial, o que evidenciaria que a quantidade de água disponível para consumo diminuiria com o passar do tempo, mas, de uma forma mais lenta.

Para isso, a professora interrogou se existe proporção entre a quantidade de água disponível na década posterior e anterior e como eles não tiveram resposta, a professora utilizou alguns exemplos numéricos para conceituar razão, proporção e constante de proporcionalidade e orientou os alunos no cálculo da razão entre a quantidade de água disponível na década posterior e anterior, na América Latina, de 1950 a 1980.

Utilizando uma calculadora, eles encontraram os seguintes valores: 0,7638095 ; 0,7693267 e 0,7909238.

A Professora questionou se o valor encontrado mostrou que existe proporção entre a quantidade de água disponível na década posterior e anterior e eles constataram que não. Então, ela colocou que como se tratava de fazer estimativas poderiam trabalhar com um valor aproximado. Com isso, um aluno perguntou-lhe se poderia utilizar o valor 0,76, por ter aparecido duas vezes e a turma concordou com este valor pelo fato de ser aproximadamente igual a 0,79.

Em seguida, ajudou-os a escrever uma expressão matemática para ser utilizada para estimar a quantidade de água disponível nas próximas décadas, que ficou assim: $Q(n) = 0,76 \cdot Q(n-10)$, sendo n as décadas a partir de 1960 e $Q(n)$ a quantidade de água disponível por pessoa na América Latina na década n .

Segundo a ONU a quantidade de água necessária para o exercício de todas as nossas atividades sociais e econômicas é de 2.500 m³ por habitante por ano,

então foi solicitado que, utilizando uma calculadora e o modelo obtido, eles fizessem previsões para a quantidade de água disponível nas próximas décadas.

Os alunos chegaram à conclusão de que em torno de 2090 não haverá mais a quantidade necessária disponível por pessoa na América Latina (encontraram para esse ano em torno de 2.390 m^3) e novamente não aceitaram muito as aproximações feitas, mas em todo caso preferiram o referido modelo.

A professora solicitou aos alunos que localizassem no mesmo plano cartesiano, alguns pares de valores (n, Q) obtidos por meio da expressão anterior com o objetivo de apresentar-lhes o tipo de decrescimento de uma função exponencial.

No final houve mais discussão sobre consumo e desperdício de água, poluição, preservação da água, etc. Em seguida, foi solicitado para que escrevessem a respeito da atividade desenvolvida e o que acharam de estudar matemática, por meio de uma situação problema real.

Ficam destacadas aqui, algumas colocações dos alunos:

Aluno 1: "Muita gente não se preocupa ainda com a água, se vai acabar um dia, as pessoas não querem nem saber disso, gostei de fazer aprendi a cuidar um pouco mais do nosso futuro".

Aluno 2: "Gostei, porque além de aprender matemática é uma forma de conscientizar as pessoas sobre a escassez da água".

Aluno 3: "achei legal e me conscientizei que a matemática é essencial para tudo".

Aluno 4: "Essa atividade foi ótima para aprender sobre a vida e como preservar mais a água".

Como nesta turma houve melhor aceitação pela metodologia aplicada, houve encorajamento por parte da professora para dar continuidade à aplicação da proposta.

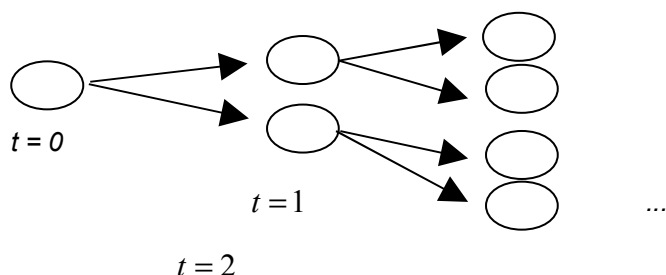
Para criar um ambiente de modelagem na turma B, a professora decidiu despertar nos alunos o interesse pelas atividades planejadas, mostrando as fotos do Ribeirão Água das Pedras, tiradas pelos alunos da turma A.

As fotos causaram impacto entre os alunos, principalmente ao observar que existe lixo no leito do rio, a maioria desconhecia tal problema; objetivando conscientizá-los sobre o problema gerado pela poluição da água e verificar se haviam construído o conceito de função exponencial, já trabalhado em aulas anteriores, foi-lhes entregue um texto informativo contendo a questão abaixo.

As bactérias podem se reproduzir com grande rapidez, dando origem a um número muito grande de descendentes em apenas algumas horas. A maioria delas reproduz-se por divisão binária (fissão

celular). Durante este processo, ocorre a duplicação do material genético bacteriano, originando duas novas bactérias que crescem até atingir o tamanho original e tornam a se dividir. Em condições ideais, uma bactéria pode se multiplicar de 20 em 20 minutos.

Considerando o esquema de uma fissão celular, complete a tabela a seguir:



Tempo (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	t
Quantidade de bactérias (Q)												

Quadro 4 – Determinação da expressão que relaciona a quantidade de bactérias com o tempo.

Durante a resolução desta atividade, a professora observou o desenvolvimento dos alunos nos diversos grupos e questionou-os para saber como eles haviam procedido. Seguem algumas observações feitas:

Os alunos de um grupo completaram o quadro corretamente, com exceção da última coluna na qual escreveram $2x$, mas, passado algum tempo, uma das alunas notou que não poderia ser uma multiplicação por 2, pois, se assim o fosse, não daria uma bactéria no instante zero, pensou um pouco e percebeu que se tratava de uma potência de base dois, escrevendo na última coluna 2^x .

A professora questionou os alunos de outro grupo se a expressão obtida por eles, t^2 , fornecia os valores da tabela e com isso, perceberam que deveria ser 2^t .

Um aluno completou a tabela assim: 1, 2, 4, 6, 8, ..., $2t$. A professora perguntou ao seu grupo como ficaria a próxima figura, então, eles desenharam e identificaram que haviam cometido erro no registro dos valores numéricos, mas, não conseguiram chegar à expressão algébrica correta e quando questionados, disseram que estava correto.

Duas alunas chegaram ao resultado 2^x após pesquisar no caderno e dois alunos de outro grupo escreveram $2Q$.

A tabela abaixo mostra o tipo de expressão obtida pelos grupos e o número de equipes que determinou cada uma delas:

Expressão	2^t	t^2	$2x$	$2t$	2	$x+x$	$2Q$	Nenhuma
Número de equipes	5	1	1	1	1	1	1	1

Quadro 5 – Dados sobre respostas encontradas pelos grupos de alunos.

Como a maioria dos alunos não obteve o resultado esperado pela professora, $Q(t)=2^t$, evidenciando não ter construído o conceito de função exponencial, a professora organizou a sala em grupos de 5 ou 6 integrantes e aplicou a atividade proposta para as turmas A e D, porém, com algumas alterações. Entregou-lhes um texto contendo a tabela 1 e as questões a seguir:

- *Construa um gráfico, no plano cartesiano, marcando no eixo das ordenadas a quantidade de água disponível por pessoa, na América Latina, e no eixo das abscissas, o tempo (em décadas).*
- *É possível estimar a quantidade de água disponível (na América Latina) nas próximas décadas (registre seu desenvolvimento).*
- *Verifique se a quantidade de água disponível por habitante da América Latina, em uma década é proporcional à quantidade de água disponível na década anterior. Sugestão: Calcule a razão entre a quantidade de água disponível na década posterior e anterior.*
- *Segundo a ONU, o volume de água, suficiente para a vida em comunidade e para o exercício das atividades humanas, sociais e econômicas, é de 2.500 m^3 por habitante ao ano. Estime, até que década os habitantes da América Latina terão esta quantidade disponível.*

Seguem algumas observações feitas pela professora, durante o desenvolvimento desta atividade:

Um grupo de alunos explicou à professora que a quantidade de água diminuiu mais ou menos 20, encontraram o valor 8,3 para o ano 2010 e não responderam as demais questões.

Os alunos de outro grupo escreveram que no primeiro diminuiu 24,8; no segundo 18,5; no terceiro 12,9; no quarto 20,5; mas, como no último tem 20 anos, aí nós dividimos por dois. Então, a água pode acabar entre 2020 e 2030.

A aluna (J) não respondeu o segundo item e solicitou da professora uma explicação para o terceiro, com sua ajuda calculou as razões solicitadas. Depois, foi multiplicando o valor encontrado (0,76 aproximadamente) pela quantidade de água disponível em uma década e encontrando a quantidade disponível nas décadas seguintes. Com isso, estimou que a quantidade de água disponível por pessoa na América Latina é menor do que 2.500 metros cúbicos na década de 2090.

O aluno (L) percebeu que a queda de uma década para a outra foi de, aproximadamente, 23%. Ele explicou que, com a calculadora, foi fazendo tentativas,

até descobrir que esta taxa era a que dava os valores mais próximos daqueles da tabela e completou-a até a década de 2090.

Em seguida, os grupos apresentaram os resultados encontrados para a sala, e como houve respostas diferentes ficou a curiosidade para saber qual delas estava correta. Então, a professora perguntou-lhes qual dos tipos de funções vistos este gráfico representava.

Alguns alunos disseram que o gráfico era uma reta e outros que parecia com aquele da função exponencial. Então, a professora foi lhes mostrando que se a água tivesse diminuído vinte mil metros cúbicos, aproximadamente, como citado por alguns alunos, o gráfico seria uma reta e antes de 2020 a água acabaria na América Latina.

Mostrou que o último ponto do gráfico estava bem distante da reta e chamou a atenção de todos para o tipo de raciocínio utilizado pelos alunos J e L, que chegaram a resultados muito próximos por caminhos diferentes. Perguntou-lhes se sabiam explicar porque isto aconteceu. Como os alunos não souberam responder, a professora fez os cálculos, que estão registrados abaixo, no quadro de giz, para mostrar que subtrair 23% de 105 é praticamente o mesmo que multiplicar 105 por 0,76:

$$\begin{aligned}105 - 23\% \text{ de } 105 &= \\105 - 0,23 \cdot 105 &= \\105(1 - 0,23) &= \\105 \cdot 0,77 &\end{aligned}$$

Em seguida, a professora solicitou para que escrevessem uma expressão matemática para a função que relaciona a quantidade (Q) de água disponível na América Latina com o tempo (t em décadas). Como eles não conseguiram sem ajuda, após algum tempo, a professora deu a sugestão de que poderiam seguir o desenvolvimento utilizado pela aluna J. Alguns alunos fizeram assim:

$$\begin{aligned}Q &= 105 \cdot 0,76 = 79,8 \\Q &= 79,8 \cdot 0,76 = 60,648 \\Q &= 60,648 \cdot 0,76 = 46,09 \\&\vdots \\&\vdots \\&\vdots\end{aligned}$$

Então, a professora sugeriu-lhes que não efetuassem as multiplicações mas que deixassem os produtos indicados, assim:

$$Q = 105 \cdot 0,76$$

$$Q = 105 \cdot 0,76 \cdot 0,76$$

$$Q = 105 \cdot 0,76 \cdot 0,76 \cdot 0,76$$

·
·
·

Com esta sugestão, alguns alunos observaram que se tratava de uma potência e relataram que a última expressão poderia ser escrita assim: $Q = 105 \cdot (0,76)^3$.

A professora sugeriu para que utilizassem uma variável para representar o tempo e como não conseguiram houve ajuda parcial por parte da professora e juntos chegaram à expressão matemática:

$Q(t) = 105 \cdot (0,76)^t$ em que $t = 0, 1, 2, \dots$, representa as décadas 1950, 1960, 1970, ..., respectivamente.

A professora lançou o questionamento sobre o tipo de função que esta expressão representa e um determinado aluno disse que parecia com uma função exponencial, mas, que a função exponencial estudada não tinha “um número multiplicando”.

Então, ela comentou que o tipo de função exponencial trabalhado até o momento é aquele que está presente na maioria dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio: $f(x)=a^x$, mas, que tratando de situações problemas reais, geralmente a expressão de uma função exponencial é $f(x)= a \cdot b^{cx}$, onde a , b e c são números reais, $b > 0$ e $b \neq 1$, como esta que acabaram de conhecer, em que $a = 105$, $b = 0,76$ e $c = 1$.

Estas atividades desenvolvidas despertaram o interesse de vários alunos das turmas A e B pelos problemas ambientais observados e com isso, cinco grupos de alunos apresentaram trabalhos ligados ao tema água, na Feira do Conhecimento no Colégio.

Considerações Finais

Foram escolhidas três turmas do primeiro ano para implementação da proposta, com o intuito de analisar a receptividade deste tipo de metodologia em cada uma delas.

Constatou-se que o envolvimento da turma com as atividades de modelagem cujo tema foi escolhido pela professora, dependeu do momento e da maneira como o convite foi feito, do tipo de atividade desenvolvida, do conhecimento e segurança da professora com relação a esta nova metodologia.

Na primeira turma a professora iniciou as atividades do folhas com a preocupação de desenvolvê-las da maneira como foram organizadas, e isto não favoreceu ao ambiente de aprendizagem pretendido, não havendo interesse da maioria dos alunos pelo tema por ela escolhido. Os alunos estavam se adaptando à nova escola, à nova professora e não estavam preparados, pelo menos naquele momento, para uma mudança de metodologia. A insegurança da professora também atrapalhou o desenvolvimento da atividade. Isto foi passando com o tempo e melhorando nas outras turmas.

Na segunda turma, na qual a proposta foi desenvolvida, os resultados foram mais satisfatórios. O que pode estar relacionado à maneira como o ambiente de modelagem foi criado, uma vez que o convite ao estudo do tema proposto foi feito no momento em que o aluno questionava o porquê de se estudar determinado conteúdo.

Também pode estar relacionado com o fato da professora não ter ficado presa à atividade do folhas, como fez com a primeira turma, pois, naquele momento havia o objetivo de fazer com que os alunos construíssem o conceito de função exponencial e neste, o objetivo era de dar significado ao conteúdo trabalhado.

Outros fatores que podem ter influenciado no bom andamento da atividade nesta turma foram: o número de alunos; sua maturidade e experiência profissional e de vida. Os alunos do período noturno são mais abertos ao diálogo o que favoreceu as discussões levantadas.

O diálogo estabelecido favoreceu o desenvolvimento da atividade como foi relatado e permitiu aos estudantes, além de perceberem a importância social da Matemática, construir conceitos matemáticos, refletir sobre os problemas sociais e ambientais existentes, como se pode perceber pelos depoimentos dados.

Na terceira turma a proposta foi implementada quando o conteúdo de função exponencial estava sendo trabalhado, o que deu maior segurança à professora na condução das atividades, favorecendo uma melhor aceitação da atividade de modelagem pelos alunos que também já tinham alguns pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da atividade proposta.

Os alunos desta turma participaram com bastante interesse tanto do desenvolvimento da atividade em si como das discussões dos problemas ambientais locais observados nas fotos, tornaram-se mais participativos nas aulas posteriores.

Percebeu-se que a modelagem matemática contribuiu para o desenvolvimento da consciência crítica dos alunos, pois, vários deles apresentaram trabalhos ligados ao tema abordado na feira do conhecimento do colégio, visando conscientizar a comunidade sobre os problemas observados. Para a apresentação dos trabalhos foram utilizados painéis de fotos, vídeos, gráficos, tabelas, maquetes, etc.

A comunidade se interessou pelos trabalhos apresentados e vários visitantes ficaram surpresos com o que viram, uma vez que no dia a dia, geralmente, as pessoas não param para observar a periferia da cidade e é ali que se encontram os maiores problemas gerados pela falta de saneamento básico.

Alguns alunos manifestaram que gostariam de dar continuidade a este trabalho. Portanto, além de aplicar atividades do folhas, esta proposta possibilitou o levantamento de diversos problemas, que desencadearão outras atividades de modelagem e espera-se que haja envolvimento destes alunos no processo de elaboração da agenda 21 Escolar.

A implementação da proposta em três turmas em momentos diferentes, representou para a professora uma oportunidade de refletir em ação e durante o processo corrigir erros e dar outros rumos à atividade em outras turmas. Foi possível perceber que cada turma reage de uma forma frente às atividades de modelagem e com isso, concluir, que o professor não deve desistir de utilizá-la em outros momentos.

Foi possível constatar que, trabalhando a matemática de maneira significativa, muitos alunos participaram e se envolveram com a atividade, demonstrando interesse pelo que estava sendo trabalhado, inclusive daqueles alunos que dizem não gostar de matemática.

E ainda, vale ressaltar aqui que mesmo que inicialmente, devido à falta de conhecimento do professor, este não esteja desenvolvendo propriamente atividades de modelagem para sua sala de aula, mas, atividade similar, devido ao baixo rendimento dos alunos em Matemática e ao desinteresse pela disciplina, torna-se importante que o professor tenha contato com a modelagem, pois, segundo BARBOSA (2004c) “o contato com a Modelagem pode oferecer subsídios para os professores desenvolverem novos entendimentos sobre matemática e seu ensino, o que pode ter impacto na prática de sala de aula”.

Referências

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e os professores**: a questão da formação. *Bolema*, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

_____. **Modelagem Matemática**: O que é? Por que? Como? *Veritati*, n.4, p. 73 – 80, 2004a.

_____. **As relações dos professores com a Modelagem Matemática**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. *Anais...* Recife: SBEM, 2004b. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (org). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira**: pesquisas práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. 144 p.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares de matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2006.